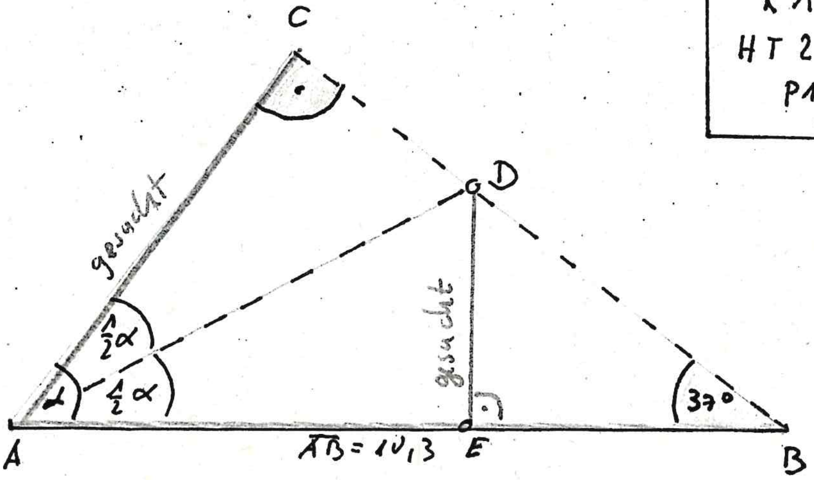
RAP
HT 2011
P1/P2

(P1) gegeben:
$\overline{AB} = 10,3\,cm$
$\beta = 37^\circ$
$\overline{AD}$ halbiert α

gesucht:
Länge $\overline{AC}$
Abstand von D zu $\overline{AB}$



Δ ADC:
$\sin\beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$; $\sin(37) = \frac{\overline{AC}}{10,3} \;\big|\cdot 10,3 \Rightarrow 10,3 \cdot \sin(37) = \overline{AC} = \underline{\underline{6,2\,cm}} \rightarrow [x]$

$\alpha = 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ \Rightarrow \underline{\tfrac{1}{2}\alpha = 26,5^\circ}$

Seite $\overline{BC}$: $\cos(37) = \frac{\overline{CB}}{10,3} \Rightarrow \overline{BC} = 10,3 \cdot \cos 37 = \underline{8,23\,cm} \rightarrow [y]$

Δ ADC:
Strecke $\overline{CD}$: $\tan(\tfrac{1}{2}\alpha) = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{CD} = 6,2 \cdot \tan(26,5) = \underline{3,09\,cm} \rightarrow [z]$

Δ BDE: Strecke $\overline{BD} = \overline{BC} - \overline{CD} = 8,23 - 3,09 = \underline{5,14\,cm} \rightarrow [t]$

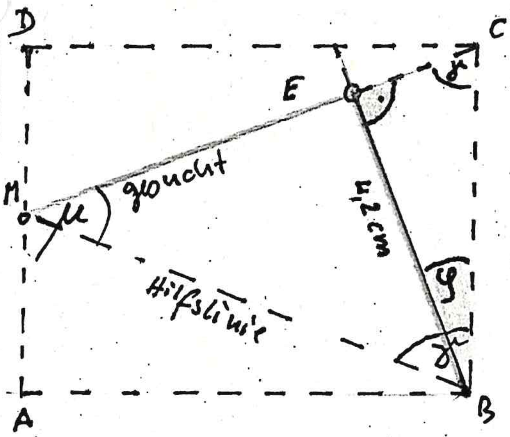
Abstand: $\sin(37) = \frac{\overline{DE}}{\overline{BD}} \Rightarrow \overline{DE} = 5,14 \cdot \sin(37) = \underline{\underline{3,09\,cm}}$

Der Abstand von D zur Strecke $\overline{AB}$ beträgt 3,1 cm

(P2) elegante Lösung: Rechteck ABC

gegeben: $\overline{BE} = 4,2\,cm$
$\varphi = 21,7^\circ$
M ist Mitte von $\overline{AD}$

gesucht: Länge $\overline{ME}$



Hilfslinie $\overline{BM}$ $\Rightarrow$ Δ BCM ist gleichschenklig

$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \gamma = 90^\circ - \varphi = 68,3^\circ \\ &\Rightarrow \sphericalangle MBC = \quad = 68,3^\circ \end{aligned}\right\}$ Basiswinkel

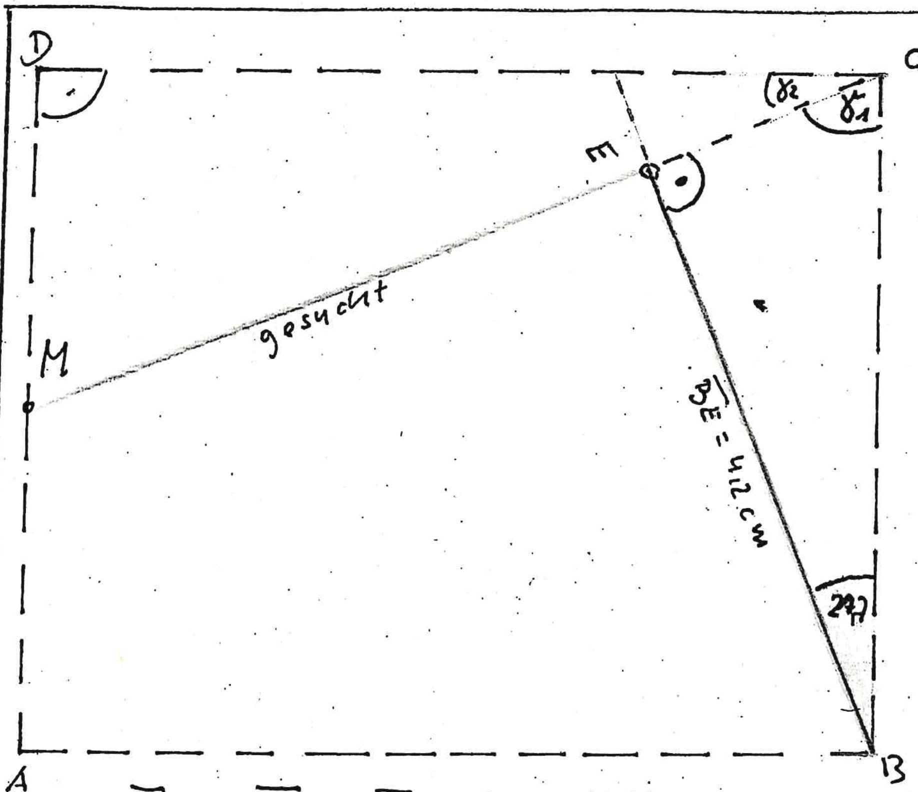
$\Rightarrow \mu = \sphericalangle BMC = 180^\circ - 2 \cdot 68,3^\circ$

$\Rightarrow \mu = 43,4^\circ$

Δ BEM: $\tan(43,4) = \frac{4,2}{\overline{ME}}$

$\Rightarrow \underline{\underline{\overline{ME}}} = \frac{4,2}{\tan(43,4)} = \underline{\underline{4,44\,cm}}$

(nur 1mal mit Taschenrechner gearbeitet! :)



$\gamma_1 = 90° - 21{,}7° = 68{,}3°$

$\triangle BCE$:

$\cos(21{,}7°) = \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = \frac{4{,}2}{\overline{BC}}$

$\overline{BC} = \frac{4{,}2}{\cos(21{,}7)} = 4{,}52\,\text{cm} \to [x]$

$\tan(21{,}7°) = \frac{\overline{CE}}{4{,}2} \Rightarrow$

$\overline{CE} = 4{,}2 \cdot \tan(21{,}7) = 1{,}67\,\text{cm} \to [y]$

$\triangle CDM$

$\gamma_2 = 90 - 68{,}3° = 21{,}7° = \varphi$

$\overline{MD} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 2{,}26\,\text{cm} \to [z]$

$\sin\gamma_2 = \frac{\overline{MD}}{\overline{MC}} \Rightarrow$

$\overline{MC} = \frac{2{,}26}{\sin(21{,}7)} = 6{,}11\,\text{cm} \to [t]$

$\Rightarrow \underline{\overline{ME}} = \overline{MC} - \overline{CE} = 6{,}11 - 1{,}67 = \underline{\underline{4{,}44\,\text{cm}}}$

ähnlich: Mittelparallele durch M und Mitte von BC

RSA 2011 HT P3|P4 W2

P3 $\frac{x+3}{2x+2} - \frac{1}{2} = \frac{x^2}{x+1} \quad | \cdot HN$ $\qquad 2x+2 = 2(x+1)$

$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}}}$ (0,5)

$x+3 - (x+1) = 2x^2$ $\qquad \underline{\underline{HN: 2\cdot(x+1)}}$ (0,5)

$2 = 2x^2$

$1 = x^2 \Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = -1 \notin \mathbb{D} \Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \{1\}}}$ (2P)

P4 $P_c: y = \frac{1}{4}x^2 + 3$ nach oben geöffnet flach, $S_y(0|3)$

$P_d: y = (x-3)^2$ Normalparabel, nach oben geöffnet Scheitel $(3|0)$

$P_a: y = x^2 + 6x + 12$ Normalparabel, nach oben geöffnet
$(x+3)^2 + 3$ $S(-3|3)$

je (1P)

P_b: Normalparabel, nach unten geöffnet, y-Achs. symm.
$S(0|3) \Rightarrow y = -(x-0)^2 + 3 = -x^2 + 3$

$\underline{\underline{y = -x^2 + 3}}$

W2a Parabelgleichung p_1 $\qquad y = x^2 + px + q$

$A(1|5) \in p_1 \Rightarrow$ $\quad$ I $\quad 5 = 1 + 1p + q$
$B(6|10) \in p_1 \Rightarrow$ $\quad$ II $\quad 10 = 36 + 6p + q$
$\Rightarrow$ II − I: $5 = 35 + 5p \Rightarrow p = -6$
in I $\Rightarrow q = 10$

$\underline{\underline{p_1: y = x^2 - 6x + 10}}$

gem. Punkte mit p_2?

$x^2 - 6x + 10 = -x^2 + 2$

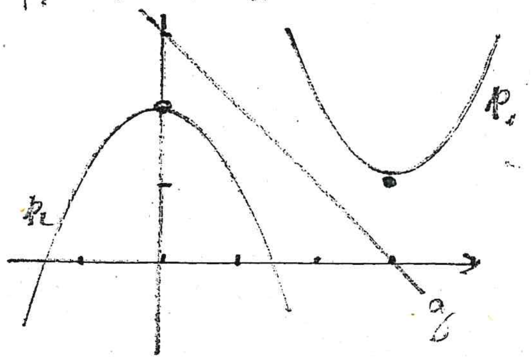
$2x^2 - 6x + 8 = 0 \quad |:2 \Rightarrow x^2 - 3x + 4 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{9}{4} - 4}_{D}}$ $\quad D < 0$ k.L.

<u>Es gibt keinen gemeinsamen Punkt.</u>

Mittels Scheitelpunkte und Skizze:

p_1 $y = (x-3)^2 + 1 \Rightarrow S_1(3|1)$

p_2: $y = -x^2 + 2 \Rightarrow S_2(0|2)$



z.B.

$\underline{\underline{g: y = -x + 3}}$

hat keinen gem. Punkt mit p_1, p_2

W2b $p: y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}$

x-Achsenpunkte $y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2} = 0 \mid \cdot 2 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 3$

$\Rightarrow N_1(-3|0);\ N_2(3|0)$

Gerade g $N_2(3|0); m = -2 \Rightarrow y = -2(x-3)+0 \Rightarrow g: y = -2x+6$

2. Schnittpunkt $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2} = -2x + 6 \Rightarrow 0 = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2} \mid \cdot 2$

$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4-3}$ $x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 4 \Rightarrow Q(1|4)$

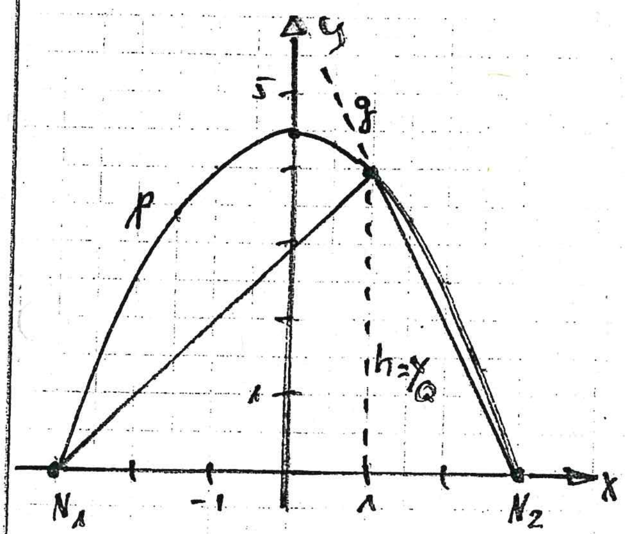
$x_2 = 3 \Rightarrow N_2(3|0)$

Fläche $\Delta N_1 N_2 Q$

Grundseite: $g = \overline{N_1N_2} = x_2 - x_1 = 3-(-3) = 6$ LE

Höhe $h = y_Q = 4$

$\Rightarrow A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \Rightarrow 12\,FE = A_\Delta$



Maximales Dreieck

$g = \overline{N_1N_2} = 6$ ist konstant.

Die Höhe $h = y_Q$ ist variabel

größter positiver y-Wert ist $\frac{9}{2}$

$\Rightarrow Q_{max}(0|\frac{9}{2})$

$(A_{max} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{9}{2} = \frac{27}{2} = 13{,}5\,FE)$

RSA 2011 HT P5 W3

(P5) $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$

Abl. $f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2}$ (1)

$f''(x) = \frac{3}{4}x - 3$ (0,5) $\left(f'''(x) = \frac{3}{4}\right.$ muß nicht sein$\left.\right)$

Wertetabelle

x	f(x)	
0	0	
1	3,1	25/8
2	4	
3	3,4	27/8
4	2	
5	0,6	5/8
6	0	
7	0,9	7/8
8	4	

Extrempunkt:

n.B. $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2} = 0 \mid \cdot \frac{8}{3}$

$x^2 - 8x + 12 = 0$

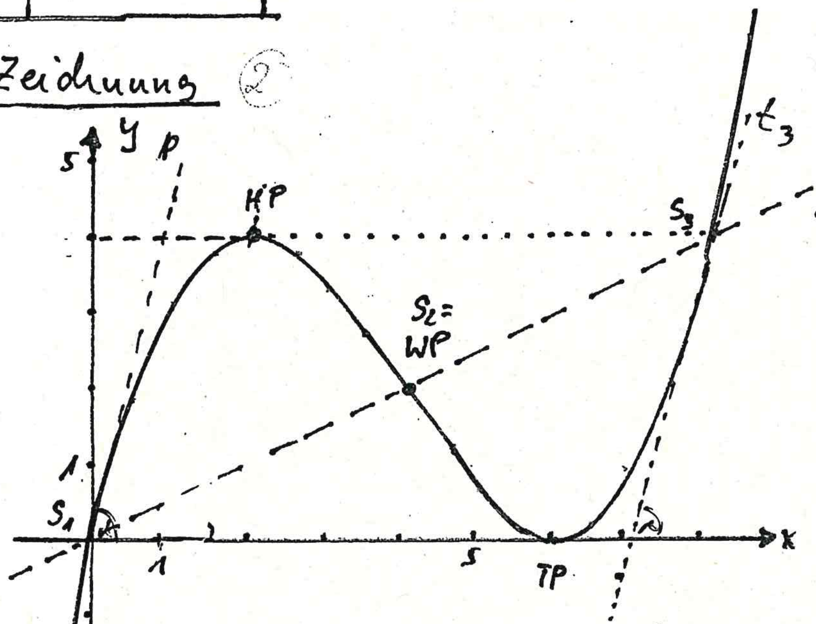
$x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16-4} = 4 \pm 2 \Rightarrow x_1 = 2 \quad x_2 = 6$ (2)

h.B. (0,5) $f''(2) = \frac{3}{4} \cdot 2 - 3 = -\frac{3}{2} < 0 \Rightarrow$ **HP(2|4)** (0,5)

(0,5) $f''(6) = \frac{3}{4} \cdot 6 - 3 = +\frac{3}{2} > 0 \Rightarrow$ **TP(6|0)** (0,5)

(W3a)

Zeichnung (2)



Wendepunkt

$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{3}{4}x - 3 = 0$

(0,5) $\Rightarrow x = 4$ $\left(f'''(4) = \frac{3}{4} \neq 0\right)$ muß nicht sein

WP(4|2)

Gerade g: durch O, W

$g: y = \frac{1}{2}x$ (0,5)

Schnittpunkte von K und g

$\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x = \frac{1}{2}x$

$\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x = 0$

$x\left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{2}x + 4\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$\Rightarrow$ **$S_1(0|0)$**

Klammer mal 8 $\Rightarrow x^2 - 12x + 32 = 0 \Rightarrow x_{2/3} = 6 \pm \sqrt{36-32}$

$\Rightarrow x_2 = 4 \Rightarrow S_2 = WP(4|2)$

$\Rightarrow x_3 = 8 \Rightarrow$ **$S_3(8|4)$** (1,5)

Tangente t_3 an K in S_3: $f'(8) = \frac{9}{2} \Rightarrow y = \frac{9}{2}(x-8) + 4 \Rightarrow$ **$t_3: y = \frac{9}{2}x - 32$** (1)

t_3 ist die 1. Gleichung

$y = 0$ (x-Achse) ist die 2. Gleichung (0,5)

$y = 4$ (Parallele durch HP) ist die 3. Gleichung (0,5)

$y = \frac{9}{2}x$ ist die 4. Gleichung (1)

spitzer Innenwinkel

$\tan\alpha = \frac{9}{2}$

$\Rightarrow$ **$\alpha = 77{,}5°$**

(1)

W3b

K_a: $g_a(x) = \frac{1}{8}x^3 + \frac{a}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$

a) Wendepunkt:

$g_a'(x) = \frac{3}{8}x^2 + ax + \frac{9}{2}$

$g_a''(x) = \frac{3}{4}x + a$

$(g_a'''(x) = \frac{3}{4})$

$\frac{3}{4}x + a = 0 \Rightarrow 0$

$\underline{\underline{x = -\frac{4}{3}a}}$

1,5

(y-Wert nicht nötig)

b) Skizzierung

$-\frac{3}{2} = \frac{3}{8}\cdot\left(-\frac{4}{3}a\right)^2 + a\cdot\left(-\frac{4}{3}a\right) + \frac{9}{2} \quad \Big| -\frac{9}{2}$

$-6 = \frac{2}{3}a^2 - \frac{4}{3}a^2 = -\frac{2}{3}a^2 \quad \Big| \cdot\left(-\frac{3}{2}\right)$

$9 = a^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{a_1 = -3}}$

$\underline{\underline{a_2 = +3}}$

2,5

P6 Gerade g_1 (2 Punkte)

$y = \frac{0{,}5 - 1{,}5}{2-(-1)} \cdot (x-2) + 0{,}5$

$y = -\frac{1}{3}(x-2) + \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{g_1: y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{6}}$

Gerade g_3 (Punkt-Steigung) $m = 1$

$y = 1 \cdot (x-1) - 0{,}5 \Rightarrow \underline{\underline{g_3: y = x - \frac{3}{2}}}$

$g_1: y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{6}$
$g_2: y = 3x + 4{,}5$
$g_3: y = x - \frac{3}{2}$

RSA
2011
HT
P6
W4

Schnittpunkt C

$3x + \frac{9}{2} = x - \frac{3}{2} \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow y = -3 - \frac{3}{2} = -\frac{9}{2} \Rightarrow \underline{\underline{C(-3|-\frac{9}{2})}}$

$B \in g_2$ (Punktprobe) $\frac{3}{2} = 3 \cdot (-1) + \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = -3 + \frac{9}{2} = \frac{3}{2}$ also $\underline{\underline{B \in g_2}}$

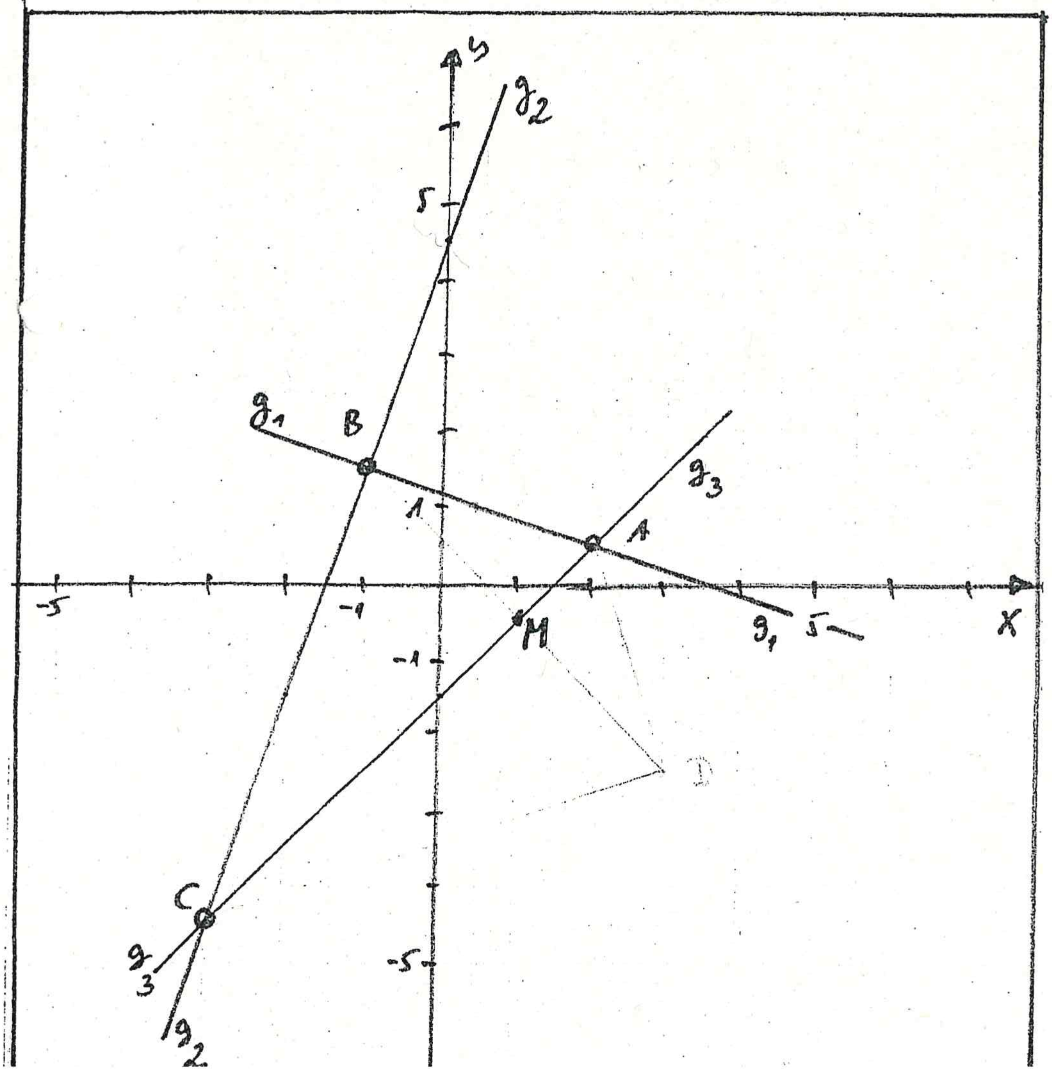
Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ $\overline{AB} = \sqrt{(1{,}5-0{,}5)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{10}$ LE

$\overline{BC} = \sqrt{(-3+1)^2 + (-4{,}5-1{,}5)^2} = \sqrt{40} = 2 \cdot \sqrt{10}$ LE

$\overline{AB}$ ist halb so lang wie $\overline{BC} \Rightarrow$ Diff. 50% oder $\frac{\overline{BC} - \overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 50\%$

$\overline{BC}$ ist doppelt so lang wie $\overline{AB} \Rightarrow$ Diff 100% $\frac{\overline{BC} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = 1 \Rightarrow 100\%$

Zeichnung: g_1 g_2 g_3



W4a

Nachweis Drachen

a) M ist Mitte von $\overline{BD}$ $\quad x_M = \frac{-1+3}{2} = 1 \quad y_M = \frac{1{,}5-2{,}5}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{M(1|-\tfrac{1}{2})}$

b) $M \in g_3$ durch A, C (P-Teil)

oder b') $m_{\overline{BD}} = \frac{-2{,}5-1{,}5}{3-(-1)} = -1 \qquad \overline{BD} \perp \overline{AC}$

Fläche des Drachens (mehrere Wege möglich)

$A_1 = A_{\triangle BCD} \qquad A_2 = A_{\triangle BDA}$ *

$A_1 = \frac{1}{2}\left[-1\left(-\frac{9}{2}+\frac{5}{2}\right) - 3\left(-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\right) + 3\left(\frac{3}{2}+\frac{9}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[2+12+18\right] = 16\text{ FE}$

$A_2 = \frac{1}{2}\left[-1\left(-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right) + 2\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[3-3+8\right] = 4\text{ FE}$

$\Rightarrow \underline{\underline{A_{Dr} = 20\text{ FE}}}$

$\Rightarrow \overline{BD}$ teilt die Fläche des Drachens $\underline{\underline{1:4}}$ bzw. $\underline{\underline{4:1}}$

W4b

$h_k: y = 2kx - 3k = k(2x-3) \qquad k \neq 0$

Nullstelle:

$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \quad \underline{\underline{N(\tfrac{3}{2}|0) \text{ unabh. von } k.}}$

$\underline{A(2|\tfrac{1}{2}) \in h_k?} \qquad \frac{1}{2} = 2\cdot k\cdot 2 - 3k \Rightarrow \underline{\underline{k = \tfrac{1}{2}}}$ 1

a) $k = \frac{1}{2} \Rightarrow h_{1/2}: y = x - \frac{3}{2} \Rightarrow h_{1/2} = g_3, \; C \in g_3 \Rightarrow \underline{\underline{C \in h_{1/2}}}$

oder b) $C \in h_k: \; -\frac{9}{2} = 2k(-3) - 3k \Rightarrow -\frac{9}{2} = -9k \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

*) Fläche: $A = \frac{e \cdot f}{2}$

$e: \overline{AC} = \sqrt{(2-(-3))^2 + (0{,}5-(-\tfrac{9}{2}))^2} = \sqrt{50}\text{ LE}$

$f: \overline{BD} = \sqrt{(3-(-1))^2 + (-2{,}5-1{,}5)^2} = \sqrt{32}\text{ LE}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A = \frac{\sqrt{50}\cdot\sqrt{32}}{2} = 20\text{ FE}}}$$